

UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES

DOYEN : M. URION

ASSESEUR: M. ECHEVIN

DOYENS HONORAIRES : M. HUSSON, CORNUBERT -DELSARTE

PROFESSEURS HONORAIRES : MM. DARLOIS E., GUTTON, CROZE, DARLOIS G., RAYBAUD, FALLOT, LAFITTE, LERAY, HUSSON, DONZELOT, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, GODFIENT, DUBREIL, SCHWARTZ, DIEUDONNE, De MALLERMAN, LONGCHAMON

MAITRES DE CONFERENCES HONORAIRES : MM. RAUX, LIENDHART

PROFESSEURS :

MM. LONGCHAMON	Minéralogie	MM. ECHEVIN	Botanique
CORNUBERT	Chimie organique	WAHL	Chimie org. industrielle
CHEVALLIER	Physique	BARRIOL	Chimie théorique
URION	Chimie biologique	OLMER	Physique appliquée
DELSARTE	Analyse supérieure	BIZETTE	Physique
REMY	Zoologie	GUILLIEN	Electronique
ROUBAULT	Géologie	GIBERT	Génie chimique
LETORD	Chimie minérale	HERVE	Calcul diff. et intégral
GUERIN	Chimie industrielle	LEGRAS	Mécanique rationnelle
DODE	Chimie phys. et électroch.	CHAPELLE	Physique
VEILLET	Biologie animale	DAVID	Chimie biologique
GAUTHIER	Mathématiques appliquées		

MAITRES DE CONFERENCES :

MM. TERNER	Botanique	MM. NICLAUSE	Génie chimique
AUBRY	Chimie	GARNIER	Agronomie
BOLFA	Minéralogie	BRUHAT	Mathématiques générales
BESSON	Chimie minérale	COPPENS	Radiogéologie
FAIVRE	Physique à l'état mét.	DUVAL	Chimie
FRUHLING	Radiotechnique	SADRAN	Géochimie
GAYET	Physiologie	CHAPON	Chimie biologique
COMOLET	Mécanique physique	HADNI	Physique
MANGENOT	Phytopathologie	Mme ROIZEN	Physique
LIONS	M.A.P.	HILLY	Géologie de la Lorraine

Secrétaire : M. LAPOINTE

1870
1871
1872
1873
1874
1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900

1901
1902
1903
1904
1905
1906
1907
1908
1909
1910
1911
1912
1913
1914
1915
1916
1917
1918
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1925
1926
1927
1928
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1935
1936
1937
1938
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1945
1946
1947
1948
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958
1959
1960
1961
1962
1963
1964
1965
1966
1967
1968
1969
1970
1971
1972
1973
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000

2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2025
2026
2027
2028
2029
2030
2031
2032
2033
2034
2035
2036
2037
2038
2039
2040
2041
2042
2043
2044
2045
2046
2047
2048
2049
2050
2051
2052
2053
2054
2055
2056
2057
2058
2059
2060
2061
2062
2063
2064
2065
2066
2067
2068
2069
2070
2071
2072
2073
2074
2075
2076
2077
2078
2079
2080
2081
2082
2083
2084
2085
2086
2087
2088
2089
2090
2091
2092
2093
2094
2095
2096
2097
2098
2099
2100

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à M. L. Gauthier, qui a bien voulu diriger mes recherches et me guider de ses conseils, ainsi que M. J. Delsarte, qui a mis à ma disposition les notes manuscrites de ses conférences anglaises sur l'hypothèse de Hasse Artin et A. Weil.

Je remercie également MM. M. Hervé et J. Lions qui ont accepté de se joindre à M. Gauthier pour constituer le jury de cette thèse.

o
o o





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547426_0020

-- BIBLIOGRAPHIE --

=====

- André WEIL : Numbers of solutions of equations in finite fields.
Bulletin of the American Mathematical Society. Mai
1949 p. 497-508.
- Jean DELSARTE : Nombre de solutions des équations polynomiales sur
un corps fini.
Séminaire Bourbaki. Mars 1951.
- Jean DELSARTE : Conférence anglaise sur les conjectures de Hasse Artin
Weil Davenport. (Manuscript).
- André WEIL : Footnote to a recent paper.
American Journal of Mathematics. Avril 1954.p. 347-350
- André WEIL : Conjectures relatives à la fonction Dzéta d'une variété
algébrique. (Conférence de Juin 1954 à l'Institut
Elie Cartan. Nancy).
- Luc GAUTHIER : La fonction Dzéta associée aux variétés biquadratiques.
Exposé au Colloque de Géométrie d'Oberwolfach. Octobre
1954.
- Luc GAUTHIER : Nombres de Betti des intersections complètes de formes
quadratiques. Comptes rendus Académie des Sciences :
9 Mai 1955.
- Luc GAUTHIER : Footnote to a footnote of André Weil.
Rendiconti Accademia di Torino. 1955.
- =====

PREMIERE PARTIE

LE MOUVEMENT DE A. WEIL

DENOMBREMENT SUR UN CORPS FIXE

Cet exposé est le développement de la note de Monsieur André Weil, publiée au Bulletin de l'American Mathematical Society.

Considérons un corps fini k , composé de q éléments et soit l'équation :

$$(1.1) \quad a_0 x_0^{n_0} + a_1 x_1^{n_1} + \dots + a_r x_r^{n_r} = b$$

où $a_i, b, x_i \in k$

Pour commencer, nous nous bornerons à étudier le cas $b = 0$

$$(1.2) \quad a_0 x_0^{n_0} + a_1 x_1^{n_1} + \dots + a_r x_r^{n_r} = 0$$

et nous montrerons par la suite, qu'il est très facile d'obtenir le nombre de solutions de l'équation (1.1), connaissant le nombre de solutions de l'équation (1.2)

Calculs préliminaires

I . Caractère additif

Le corps k constitue un groupe additif sur lequel on peut définir un caractère additif ψ de la manière suivante :

$$- \text{ pour tout } x \in k, \text{ on aura } \psi(x) = e^{2\pi i \frac{x}{q}}$$

On a de toute évidence :

$$\begin{aligned} - & \psi(x) \cdot \psi(y) = \psi(x + y) \\ - & \psi(0) = 1 \\ - & \overline{\psi(x)} = \psi(-x) \end{aligned}$$

et $x = 0$ est le seul élément du corps pour lequel $\Psi(x) = 1$.

Il est évident que si $a = 0$,

$$\sum_{y \in k} \Psi(ay) = \sum_{y \in k} \Psi(0) = q$$

Par contre si a est un élément fixe de k différent de zéro, et si y parcourt tous les éléments de k , $z = ay$ parcourt tous les éléments de k . Donc pour $a \neq 0$

$$S = \sum_{y \in k} \Psi(ay) = \sum_{z \in k} \Psi(z)$$

Or, lorsque z parcourt tous les éléments de k , si b est un élément fixe arbitraire de k , $u = z - b$ parcourt aussi tous les éléments de k . Donc :

$$S = \sum_{z \in k} \Psi(z) = \sum_{u \in k} \Psi(b + u) = \Psi(b) \cdot \sum_{u \in k} \Psi(u) = \Psi(b) \cdot S$$

En choisissant $b \neq 0$, de façon que $\Psi(b) \neq 1$, cette relation entraîne :

$$S = 0$$

Ainsi :

$$(1.3) \quad \sum_{y \in k} \Psi(ay) = \begin{cases} q & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

II. Caractères multiplicatifs

L'ensemble des éléments non nuls de k constitue un groupe multiplicatif $k^* = k - \{0\}$

Soit ω un générateur de k^* . Les éléments de k^* sont :

$$\omega, \omega^2, \dots, \omega^{q-1} = 1$$

On peut définir sur k^* un caractère multiplicatif de la manière suivante :

$$\chi_{\alpha}(\omega) = e^{2\pi i \alpha \lambda}$$

où α est un nombre rationnel satisfaisant $\alpha \cdot (q-1) \equiv 0 \pmod{1}$ (1)

Puisque χ est un caractère multiplicatif, on devra avoir :

$$\chi_{\alpha}(x) \cdot \chi_{\alpha}(y) = \chi_{\alpha}(x \cdot y)$$

et si $x = \omega^{\lambda}$, $\chi_{\alpha}(x) = \chi_{\alpha}(\omega^{\lambda}) = [\chi_{\alpha}(\omega)]^{\lambda} = e^{2\pi i \alpha \lambda}$

On a $\chi_{\alpha}(x) = \chi_{\alpha}(x^{-1})$

On pose $\chi_{\alpha}(0) = 0$ pour $\alpha \neq 0$, et $\chi_{\alpha}(0) = 1$ pour $\alpha = 0$

Soit d un diviseur de $q-1$, on a :

$$(1.4) \quad \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u = 0 \\ \begin{cases} d & \text{si } u \text{ est une puissance} \\ & d^{\text{ième}} \text{ exacte dans } K \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} & \text{si } u \neq 0 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} \alpha \cdot d \equiv 0 \pmod{1} \\ 0 \leq \alpha < 1 \end{array} \right]$

Démonstration : $\alpha = 0, \frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \dots, \frac{d-1}{d}$

- si $u = 0$ la somme se réduit à $\chi_0(0) = 1$

- si $u \neq 0$ $u = \omega^{\lambda}$, $\chi_{\alpha}(u) = [\chi_{\alpha}(\omega)]^{\lambda} = e^{2\pi i \alpha \lambda}$

$$\sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(u) = \sum_{\alpha} e^{2\pi i \alpha \lambda} = 1 + e^{2\pi i \frac{\lambda}{d}} + e^{2\pi i \frac{2\lambda}{d}} + \dots + e^{2\pi i \frac{(d-1)\lambda}{d}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha \cdot d \equiv 0 \pmod{1} \\ 0 \leq \alpha < 1 \end{array} \right] = \frac{e^{2\pi i \lambda} - 1}{1 - e^{2\pi i \lambda / d}}$$

- si λ est divisible par d c-à-d. si $u = \omega^{\lambda}$ est une puissance $d^{\text{ième}}$ exacte dans K , tous les termes de la somme sont égaux à 1, et

la somme est égale à d .

- sinon la somme est nulle.

D'une manière identique on démontre que :

$$\sum_{\substack{x \in k \\ x \neq 0}} \chi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha \neq 0 \\ q - 1 & \text{pour } \alpha = 0 \end{cases}$$

III. Sommes de Gauss.

On appellera somme de Gauss dans le corps k l'expression suivante :

$$g(\chi) = \sum_{x \in k} \chi(x) \cdot \psi(x)$$

où χ est un^{des} caractères multiplicatifs vus plus haut autre que χ_0 .

Moyennant cette restriction on a $\chi(0) = 0$ si bien que $g(\chi)$ peut

s'écrire :
$$\sum_{\substack{x \in k \\ x \neq 0}} \chi(x) \cdot \psi(x)$$

On aura :
$$\overline{g(\chi)} = \sum_{y \neq 0} \chi(y^{-1}) \cdot \psi(-y)$$

et
$$g(\chi) \cdot \overline{g(\chi)} = \sum_{y \neq 0} \left[\sum_{x \neq 0} \chi(xy^{-1}) \cdot \psi(x - y) \right]$$

Effectuons tout d'abord la somme par rapport à x en fixant y . Lorsque x décrit k^* , xy parcourt tous les éléments de k^* à condition que $y \neq 0$.

Nous pouvons donc opérer le changement de variable $x \rightarrow xy$

$$g(\chi) \cdot \overline{g(\chi)} = \sum_{y \neq 0} \left[\sum_{x \neq 0} \chi(x) \cdot \psi[y(x-1)] \right]$$

Intervertissons les signes

$$= \sum_{x \neq 0} \chi(x) \left[\sum_{y \neq 0} \psi[y(x-1)] \right]$$

Or le résultat (1.3) nous donne l'expression du crochet :

$$\sum_{y \neq 0} \overline{\Psi[y(x-1)]} = \begin{cases} q-1 & \text{si } x=1 \\ -1 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

$$(1.5) \quad \text{et } g(X), \overline{g(X)} = q \cdot X(1) - \sum_{x \neq 0} \overline{X(x)} = q$$

Par définition on a $g(X) = \sum_{t \neq 0} X(t) \cdot \Psi(t)$

Si $x \neq 0$ et si t parcourt k^* alors tx parcourt k^* . J'opère donc le changement de variable $t \rightarrow tx$

$$g(X) = X(x) \cdot \sum_{t \neq 0} \overline{X(t) \cdot \Psi(tx)}$$

et de même $\overline{g(X)} = \overline{X(x)} \cdot \sum_{t \neq 0} \overline{X(t) \cdot \Psi(tx)}$

$$g(X) \cdot \overline{g(X)} = q = \overline{g(X)} \cdot X(x) = \sum_{t \neq 0} \overline{X(t) \cdot \Psi(tx)}$$

et en se rappelant que $\overline{X(x)} = [X(x)]^{-1}$

$$(1.6) \quad X(x) = \frac{g(X)}{q} \cdot \sum_{t \neq 0} \overline{X(t) \cdot \Psi(tx)}$$

Cette égalité est encore vraie pour $x=0$, car alors $X(0)=0$ et comme

$$\overline{\Psi(0)} = 1, \text{ il reste au second membre } \sum_{t \neq 0} \overline{X(t)} = 0$$

o
o o

Calcul de N, nombre de solutions dans k de l'équation :

$$a_0 x_0^{m_0} + a_1 x_1^{m_1} + \dots + a_n x_n^{m_n} = 0$$

On va tout d'abord simplifier le travail en cherchant le nombre

$N_i(u_i)$ de solutions de l'équation $x_i^{n_i} = u_i$

Soit $d_i = (n_i, q-1)$. On a alors le résultat suivant :

- si $u_i = 0$ $N_i(u_i) = 1$

- si $u_i \neq 0$
$$\begin{cases} N_i(u_i) = 0 & \text{si } u_i \text{ n'est pas une puissance } d_i^{\text{ième}} \\ & \text{exacte dans } k \\ N_i(u_i) = d_i & \text{si } u_i \text{ est une puissance } d_i^{\text{ième}} \text{ exacte} \\ & \text{dans } k \end{cases}$$

D'après le résultat (1.4) de nos calculs préliminaires, on a :

$$N_i(u_i) = \sum_{\alpha_i} \chi_{\alpha_i}(u_i) \text{ avec } d_i \cdot \alpha_i \equiv 0 \pmod{1}, \quad 0 \leq \alpha_i < 1$$

Posons alors
$$L(u) = \sum_{i=0}^r a_i u_i$$

On a :
$$N = \sum_{L(u)=0} N_0(u_0) \cdot N_1(u_1) \cdot \dots \cdot N_r(u_r)$$

et en utilisant les caractères multiplicatifs :

$$(1.7) \quad N = \sum_{\alpha, u} \chi_{\alpha_0}(u_0) \cdot \dots \cdot \chi_{\alpha_r}(u_r) \left[L(u) = 0, d_i \cdot \alpha_i \equiv 0 \pmod{1}, 0 \leq \alpha_i < 1 \right]$$

Débarrassons nous tout d'abord des $\alpha_i = 0$ en considérant deux cas :

1) Tous les α_i sont nuls. L'expression sous le signe $\sum$ est égale à 1, et il reste à sommer par rapport à u . Or la variété linéaire $L(u) = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_r u_r = 0$ possède q^r points dans k . Donc l'expression (1.7) est égale à q^r , si l'on fait $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$

2) Certains α_i sont nuls, mais pas tous.

$$\begin{cases} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1} \neq 0 \\ \alpha_s = \dots = \alpha_r = 0 \end{cases}$$

Donnons nous ce système de α_i bien déterminé et sommons par rapport à

u. Quels que soient $u_0, \dots, u_r$, la quantité sous le signe $\sum$ est égale à

$$\chi_{\alpha_0}(u_0) \dots \chi_{\alpha_{s-1}}(u_{s-1})$$

et comme on a q^{r-s} façons différentes de choisir le système de $r-s+1$ variables $u_s, \dots, u_r$, cela va nous donner :

$$q^{r-s} \sum_{u_s, \dots, u_{s-1}} \chi_{\alpha_0}(u_0) \dots \chi_{\alpha_{s-1}}(u_{s-1})$$

où cette fois-ci $u_0, \dots, u_{s-1}$ prennent toutes les valeurs de k^* (le cas $u_i = 0$ n'est pas à considérer car il entraîne $\chi_{\alpha_i}(0) = 0$)

L'expression ci-dessus va donc s'écrire :

$$q^{r-s} \prod_{i=0}^{s-1} \left(\sum_{u_i \in k^*} \chi_{\alpha_i}(u_i) \right)$$

Or d'après les calculs préliminaires, chacune de ces sommes est nulle.

Par conséquent chacun des facteurs, où des α_i (mais non tous) sont nuls, est nul.

On a donc comme nouvelle expression de N :

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{aligned} N &= q^r + \sum_{u, \alpha} \chi_{\alpha_0}(u_0) \dots \chi_{\alpha_r}(u_r) \\ &\left[L(u) = 0, \quad d_i \cdot \alpha_i \equiv 0 (1), \quad 0 < \alpha_i < 1 \right] \end{aligned} \right.$$

Effectuons alors le changement de variable $u_i \rightarrow \frac{u_i}{a_i}$

La condition $L(u) = 0$ devient $\sum_{i=0}^r u_i = 0$, et on a :

$$N = q^r + \sum_{\alpha} \chi_{\alpha_0}(a_0^{-1}) \dots \chi_{\alpha_r}(a_r^{-1}) \cdot S(\alpha) \\ \left[d_i \alpha_i \equiv 0 (1), \quad 0 < \alpha_i < 1 \right]$$

en posant

$$S(\alpha) = S(\alpha_0, \dots, \alpha_r) = \sum_{u_i} \chi_{\alpha_0}(u_0) \dots \chi_{\alpha_r}(u_r) \\ \left(\sum u_i = 0 \right)$$

Calcul de S(α)

Nous pouvons supposer $u_0 \neq 0$, car si $u_0 = 0$ $\chi_{\alpha_0}(u_0) = 0$,
puisque $\alpha_0 \neq 0$

Dans ces conditions posons $u_i = u_0 v_i$ ($i = 1, \dots, r$)

et $\sum_{i=1}^r u_i = 0$ devient $u_0 \left(1 + \sum_{i=1}^r v_i \right) = 0$

Effectuons la sommation sur tous les u_0 non nuls et sur tous les v_i satisfaisant $1 + \sum_{i=1}^r v_i = 0$

Ce qui donne :

$$S(\alpha) = \sum_{v_i} \left[\chi_{\alpha_1}(v_1) \dots \chi_{\alpha_r}(v_r) \sum_{u \neq 0} \chi_{\alpha_0}(u_0) \dots \chi_{\alpha_r}(u_r) \right] \\ \left(1 + \sum v_i = 0 \right)$$

Si l'on pose $\beta = \sum_{i=1}^r \alpha_i$, on a :

$$\sum_{u_0 \neq 0} \chi_{\alpha_0}(u_0) \dots \chi_{\alpha_r}(u_r) = \sum_{u_0 \neq 0} \chi_{\beta}(u_0)$$

somme qui vaut :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \beta \neq 0 \quad (1) \\ q-1 & \text{si } \beta \equiv 0 \quad (1) \end{cases}$$

Nous poserons :

$$(1.9) \quad j(\alpha) = \sum_{\substack{v_i \\ (1 + \sum_{i=1}^r v_i = 0)}} \chi_{\alpha_1}(v_1) \dots \chi_{\alpha_r}(v_r) \\ = \frac{1}{q-1} \sum_{\substack{u_i \\ (\sum u_i = 0)}} \chi_{\alpha_0}(u_0) \dots \chi_{\alpha_r}(u_r)$$

Pour tous les systèmes de α_i satisfaisant les conditions suivantes :

$$\left[\alpha_i \cdot \alpha_i \equiv 0 \quad (1) \quad , \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad , \quad \sum_{i=0}^r \alpha_i \equiv 0 \quad (1) \right]$$

et en fonction des $j(\alpha)$, N s'écrit :

$$(1.10) \quad N = q^r + (q-1) \sum_{\alpha} \chi_{\alpha_0}(a_0^{-1}) \dots \chi_{\alpha_r}(a_r^{-1}) \cdot j(\alpha)$$

Les $j(\alpha)$ sont appelés sommes de Jacobi dans le corps k et sont étroitement liés aux sommes de Gauss dans ce même corps k . Nous allons nous en apercevoir en utilisant le résultat (1.6) des calculs préliminaires.

$$\chi_{\alpha}(x) = \frac{g(\chi_{\alpha})}{q} \sum_{t \neq 0} \overline{\chi_{\alpha}(t)} \cdot \overline{\Psi(tx)} \quad \text{avec } \alpha \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } (q-1) j(\alpha) &= \sum_{(\sum u_i = 0)} \chi_{\alpha_0}(u_0) \dots \chi_{\alpha_r}(u_r) \\ &= q^{-r-1} g(\chi_{\alpha_0}) \dots g(\chi_{\alpha_r}) \cdot \sum_{(\sum u_i = 0)} \sum_{t_i \neq 0} \overline{\chi_{\alpha_0}(t_0)} \dots \overline{\chi_{\alpha_r}(t_r)} \cdot \overline{\Psi(t_0 u_0)} \dots \overline{\Psi(t_r u_r)} \\ &= q^{-r-1} g(\chi_{\alpha_0}) \dots g(\chi_{\alpha_r}) \cdot \sum_{t_i \neq 0} \left[\overline{\chi_{\alpha_0}(t_0)} \dots \overline{\chi_{\alpha_r}(t_r)} \sum_{(\sum u_i = 0)} \overline{\Psi\left(\sum_{i=0}^r t_i u_i\right)} \right] \end{aligned}$$

Dans le groupe additif de tous les vecteurs $u : (u_0, u_1, \dots, u_r)$ les vecteurs satisfaisant $\sum_{i=0}^r u_i = 0$ forment un sous-groupe à q^r éléments,

sur lequel $\overline{\Psi\left(\sum_{i=0}^r t_i u_i\right)}$ forme un caractère. La somme des valeurs de

ce caractère est égale à q^r si le caractère a la valeur constante 1, et égale à 0 autrement. Pour que $\overline{\Psi\left(\sum_{i=0}^r t_i u_i\right)} = 1$, il faut et il suffit que

$\sum_{i=0}^r t_i u_i = 0$ et comme de plus on a $\sum_{i=0}^r u_i = 0$, cela entraîne

que tous les t_i doivent être égaux. On a alors :

$$(q-1) j(\alpha) = q^{-r-1} g(X_{\alpha_0}) \dots g(X_{\alpha_n}) \cdot q^r \cdot \sum_{t \neq 0} \overline{X_{\alpha_0}(t)} \dots \overline{X_{\alpha_n}(t)}$$

Or on a :

$$\sum_{t \neq 0} X_{\alpha_0}(t) \dots X_{\alpha_n}(t) = \sum_{t \neq 0} X_{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n}(t) = \sum_{t \neq 0} X_{\alpha}(t) = q^{-1}$$

Finalement on a :

$$(1.11) \quad j(\alpha) = \frac{1}{q} g(X_{\alpha_0}) \dots g(X_{\alpha_n})$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} |j(\alpha)| &= j(\alpha) \cdot \overline{j(\alpha)} = \frac{1}{q} g(X_{\alpha_0}) \dots g(X_{\alpha_n}) \cdot \frac{1}{q} \overline{g(X_{\alpha_0}) \dots g(X_{\alpha_n})} \\ &= \frac{1}{q^2} q^{r+1} = q^{r-1} \end{aligned}$$

ce qui conduit à une majoration de N

$$|N - q^r| \leq M(q-1), \quad q^{\frac{r-1}{2}}$$

où M est le nombre de systèmes de nombres rationnels satisfaisant aux conditions :

$$a_i, \alpha_i \equiv 0(1), \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i \equiv 0(1)$$

Calcul de N, nombre de solutions de l'équation :

$$a_0 x_0^{n_0} + \dots + a_n x_n^{m_n} - b = 0$$

Considérons l'équation :

$$a_0 x_0^{n_0} + \dots + a_n x_n^{m_n} - b x_{n+1}^{q-1} = 0$$

Soit N' le nombre de solutions de cette équation. Chaque fois que nous donnerons à x_{n+1} des valeurs différentes de 0, $x_{n+1}^{q-1} = 1$, on retombera sur $a_0 x_0^{n_0} + \dots + a_n x_n^{m_n} - b = 0$ dont le nombre de solutions est égal à N_p

Si l'on fait $x_r + 1 = 0$, on tombera sur $a_0 x_0^{m_0} + \dots + a_n x_n^{m_n} = 0$
dont le nombre de solutions est N

(1.12) On a donc $N' = (q-1) N_b + N$

Or on peut connaître N' par analogie avec N , ce qui nous donne le nombre N_b de solutions de l'équation :

$$a_0 x_0^{m_0} + \dots + a_n x_n^{m_n} = b$$

CHAPITRE II

THEOREME DE HASSE DAVENPORT

Il est d'un intérêt considérable de comparer le nombre de solutions d'une équation, dans un corps donné et dans toutes les extensions de degré fini de ce corps.

Dans le cas présent de l'équation $a_0 x_0^{m_0} + \dots + a_n x_n^{m_n} = b$ cela va être possible en utilisant une relation due à Hasse et Davenport, relation entre les sommes de Gauss dans un corps fini et dans ses extensions.

Soit k' une extension de k de degré ν . Soient x et y deux éléments de k' .

$N(y)$ désignera la norme de y sur k c-à-d le produit des conjugués de y .

$T(y)$ désignera la trace de y sur k c-à-d la somme des conjugués de y .

On aura : $N(x.y) = N(x).N(y)$ et $T(x+y) = T(x) + T(y)$

Si $-y$ est solution de l'équation : $\xi^\nu + s_1 \xi^{\nu-1} + \dots + s_\nu = 0$ alors on a $T(y) = s_1$ et $N(y) = s_\nu$

Toute notre étude du nombre de solutions dans le corps k reposait sur la définition des caractères multiplicatifs et additifs définis sur le corps k et de norme égale à 1. Par conséquent pour obtenir un résultat analogue dans k' , il nous faudra définir des caractères multiplicatifs et additifs dans k' .

Pour cela on procèdera de la manière suivante

Caractère multiplicatif : Si ω est un générateur du groupe multiplicatif k^* , alors il existe un générateur z de k'^* tel que $N(z) = \omega$, et nous poserons $\chi'_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \cdot (q-1) \equiv 0 \pmod{1}$. A partir de là, $\chi'_\alpha(y)$ sera entièrement déterminé et l'on aura : $\chi'_\alpha(y) = \chi_\alpha[N(y)]$

Caractère additif : On posera $\psi'(y) = \psi[T(y)]$ ce qui est bien un caractère additif de k' non toujours égal à 1.

Sommes de Gauss : on peut maintenant définir la somme de Gauss $g'[\chi'_\alpha]$ sur k'

$$g'[\chi'_\alpha] = \sum_{y \in k'} \chi'_\alpha(y) \psi'(y)$$

Et le théorème de Hasse et Davenport est le suivant :

$$(2.1) \quad -g'(\chi'_\alpha) = \left[-g(\chi_\alpha) \right]^q$$

Démonstration :

Considérons les polynômes à coefficients dans k dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1, ce degré étant au moins égal à 1 ($n \geq 1$)

$$F(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_n$$

A ce polynôme attachons le nombre

$$\lambda(F) = \chi_\alpha(c_n) \psi(c_1)$$

Considérons 2 tels polynômes :

$$F_1(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_n$$

$$F_2(X) = X^m + d_1 X^{m-1} + \dots + d_m$$

On a : $F_1 F_2 (X) = X^{n+m} + X^{n+m-1} (c_1 + d_1) + \dots + c_n d_m$

$$\begin{aligned} \lambda(F_1 F_2) &= \chi_{\alpha(c_n d_m)} \Psi_{(c_1 + d_1)} = \chi_{\alpha(c_n)} \Psi_{(c_1)} \cdot \chi_{\alpha(d_m)} \Psi_{(d_1)} \\ &= \lambda(F_1) \cdot \lambda(F_2) \end{aligned}$$

On a l'identité formelle : (en prenant une indéterminée U)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \lambda(P) \cdot U^{n(P)}} &= 1 + \lambda(P) \cdot U^{n(P)} + \lambda(P^2) \cdot U^{n(P^2)} + \dots \\ &\dots + \lambda(P^S) \cdot U^{n(P^S)} + \dots \end{aligned}$$

où nous supposons que P est un polynôme irréductible sur k et de plus grand coefficient égal à 1. Faisons alors le produit

$$\prod_P \frac{1}{1 - \lambda(P) \cdot U^{n(P)}}, \text{ le produit } \prod \text{ étant étendu à tous les}$$

polynômes irréductibles sur k et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

Si nous faisons le produit des membres de droite, nous obtiendrons un terme, en prenant un terme dans la première somme, un autre dans la seconde, etc ..., ce qui nous donnera (d'après la propriété multiplicative de λ) : $\lambda(F) \cdot U^{n(F)}$

Il est clair que nous obtiendrons de la sorte tous les polynômes F , car chacun de ces polynômes peut s'exprimer d'une manière et d'une seule comme produit de puissances de polynômes irréductibles.

On aura donc :

$$1 + \sum_F \lambda(F) \cdot U^{n(F)} = \prod \left[1 - \lambda(P) \cdot U^{n(P)} \right]^{-1}$$

Considérons tout d'abord le membre de gauche, et pour commencer les poly-

nômes du premier degré :

$$F(X) = X + c \quad \lambda(F) = \chi_{\alpha}(c) \Psi(c)$$

et $\sum_{F, n(F)=1} \lambda(F).U = \sum_c \chi_{\alpha}(c) \Psi(c).U = g(\chi_{\alpha}).U$

Maintenant effectuons $\sum_F \lambda(F).U^{n(F)}$, la somme étant étendue à

tous les polynômes F de degré égal à n , n étant plus grand que 1.

$$\text{On a : } \sum_F \lambda(F).U^n = q^{n-2} \sum_{c_n} \chi_{\alpha}(c_n) \cdot \sum_{c_1} \Psi(c_1).U^n$$

le q^{n-2} provenant des q choix possibles pour les $n-2$ coefficients

$c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$.

Or, c_n et c_1 prenant toutes les valeurs de k , les deux sommes

$$\sum_{c_n} \chi_{\alpha}(c_n) \text{ et } \sum_{c_1} \Psi(c_1) \text{ sont nulles, si bien que}$$

$$\sum_{F, n(F)=n} \lambda(F).U^n = 0 \text{ pour } n > 1$$

On en déduit que :

$$(2.2) \quad 1 + g(\chi_{\alpha}).U = \prod_P \left[1 - \lambda(P).U^{n(P)} \right]^{-1}$$

De la même manière, si $F'(X) = X^n + d_1 X^{n-1} + \dots + d_n$ est un poly-

nôme sur k' , on pourra écrire :

$$(2.3) \quad 1 + g'(\chi'_{\alpha}).U' = \prod_{P'} \left[1 - \lambda(P').U'^{n(P')} \right]^{-1}$$

en prenant une autre indéterminée U' , et où le produit est pris sur tous les polynômes P' irréductibles sur k' et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

Soit donc P' un des facteurs irréductibles de P sur k' .

Soit θ une des racines de P' .

θ engendre sur k une extension $k(\theta)$ de degré $n = n(P)$

θ engendre sur k' une extension $k'(\theta)$ de degré $n' = n(P')$

L'extension $k'(\theta)$ obtenue à partir de k est composée de l'extension k' et de l'extension $k(\theta)$. Comme k' est de degré ν sur k et $k(\theta)$ de degré n sur k , $k'(\theta)$ sera une extension de degré $\frac{n\nu}{d}$ sur k , en posant $d = (n, \nu)$.

Par conséquent on a $n' = \frac{n}{d}$, et le polynôme P est composé de d polynômes P' de degré $\frac{n}{d}$.

Soient a la norme de θ prise dans $k(\theta)$ relativement à k , et b la trace de θ prise dans $k(\theta)$ relativement à k .

On a : $P(X) = X^n + bX^{n-1} + \dots + a$

et $\lambda(P) = \chi_\alpha(a) \Psi(b)$

De même soient a' et b' la norme et la trace de θ prises dans $k'(\theta)$ relativement à k' .

On a : $\lambda'(P') = \chi'_\alpha(a') \Psi'(b') = \chi_\alpha(Na') \cdot \Psi(Tb')$

où Na' est la norme de a' et Tb' la trace de b' , prises dans k' relativement à k . On en déduit que Na' et Tb' sont la norme et la trace de θ prises dans $k'(\theta)$ relativement à k .

Ceci peut se décomposer d'une autre manière en passant par l'intermédiaire de $k(\theta)$. Nous obtiendrons ainsi Na' , en prenant la norme de θ dans $k'(\theta)$ relativement à $k(\theta)$, ce qui est $\theta^{\frac{\nu}{d}}$ (puisque θ est un élément de $k(\theta)$ et que $k'(\theta)$ est de degré $\frac{\nu}{d}$ sur $k(\theta)$). Puis il nous

faudra prendre la norme de ce résultat dans $k(\xi)$ relativement à k .

Or a est égal à la norme de ξ prise dans $k(\xi)$ relativement à k .

Nous aurons donc $Na' = a^{\frac{\gamma}{d}}$. On obtiendrait de même $Tb' = \frac{\gamma}{d} \cdot b$

$$\text{et } \lambda'(P') = \chi_{\alpha}(a^{\frac{\gamma}{d}}) \cdot \psi\left(\frac{\gamma}{d} \cdot b\right) = \left[\chi_{\alpha}(a) \psi(b) \right]^{\frac{\gamma}{d}} = \lambda(P)^{\frac{\gamma}{d}}$$

Une fois ce résultat obtenu, reprenons l'équation (2.3) et groupons dans

le membre de droite les d facteurs correspondant à tous les facteurs

irréductibles de P sur k' et remplaçons l'indéterminée U' par U^{γ} ,

$$\text{ce qui donne : } \left[1 - \lambda(P)^{\frac{\gamma}{d}} \cdot U^{\frac{\gamma n}{d}} \right]^{-d}$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$\prod_{p=0}^{\frac{\gamma-1}{d}} \left[1 - \lambda(P) \cdot (\xi^p \cdot U)^n \right]^{-1}$$

où ξ est une racine primitive $\gamma^{\text{ème}}$ de l'unité. Afin de démontrer

cela découpons ce produit de γ termes en d produits de $\frac{\gamma}{d}$ termes

chacun :

$$0 \leq p \leq \frac{\gamma}{d} - 1, \quad \frac{\gamma}{d} \leq p \leq \frac{2\gamma}{d} - 1, \dots, \quad \frac{d-1}{d} \gamma \leq p \leq \gamma - 1$$

Soit η une racine primitive $\frac{\gamma}{d}^{\text{ème}}$ de l'unité. On a $\eta = \xi^d$

Posons $n = n' \cdot d$ et $\gamma = \gamma' \cdot d$. Il vient $\xi^m = \xi^{dn'} = \eta^{n'}$

Notre produit partiel $(0 \leq p \leq \gamma' - 1)$ peut donc s'écrire :

$$\prod_{p=0}^{\gamma'-1} \left[1 - \lambda(P) \cdot \eta^{pn'} \cdot U^n \right]^{-1}$$

Or pn' pris modulo $\gamma' = \frac{\gamma}{d}$, nous donne tous les nombres compris entre

0 et $\gamma' - 1$. En effet si l'on avait $hn' \equiv kn' \pmod{\gamma'}$ cela entraînerait

$(h-k)n' = \lambda \mathfrak{J}'$, ce qui est impossible puisque n' et $\mathfrak{J}'$ sont premiers entre eux et que $h-k < \mathfrak{J}'$. Le produit peut donc s'écrire :

$$\prod_{p=0}^{\mathfrak{J}'-1} \left[1 - \lambda(p) \eta^p u^n \right]^{-1} = \left[1 - \lambda(p)^{\mathfrak{J}/d} u^{n\mathfrak{J}/d} \right]^{-1}$$

On trouve le même résultat pour tous les intervalles de variation de p .

Comme ces derniers sont au nombre de d , on a bien :

$$\prod_{p=0}^{\mathfrak{J}-1} \left[1 - \lambda(p) (\zeta^p u^n) \right]^{-1} = \left[1 - \lambda(p)^{\mathfrak{J}/d} u^{n\mathfrak{J}/d} \right]^{-d}$$

L'équation (2.3) donne donc :

$$1 + g'(\chi'_\alpha) u^{\mathfrak{J}} = \prod_{p=0}^{\mathfrak{J}-1} \prod_P \left[1 - \lambda(p) (\zeta^p u^n) \right]^{-1}$$

ce qui d'après l'équation (2.2) est égal à :

$$\prod_{p=0}^{\mathfrak{J}-1} \left[1 + g(\chi_\alpha) \zeta^p u \right] = 1 + (-1)^{\mathfrak{J}+1} g(\chi_\alpha)^{\mathfrak{J}} u^{\mathfrak{J}}$$

D'où le résultat annoncé :

$$- g'(\chi'_\alpha) = \left[-g(\chi_\alpha) \right]^{\mathfrak{J}}$$

ce qui constitue le théorème Hasse et Davenport.

CHAPITRE III

LA CONJECTURE DE A. WEIL

Connaissant le théorème de Hasse et Davenport, on peut aisément calculer $N_{\mathfrak{p}}$, nombre de solutions d'une équation du type (1.1) sur une extension de degré $\mathfrak{p}$ du corps k . Il est alors évident que $N_{\mathfrak{p}}$ est indépendant de l'extension envisagée, pourvu qu'elle soit de degré $\mathfrak{p}$.

Il est alors facile de donner une expression simple de la série $\sum_{\mathfrak{p}=1}^{\infty} N_{\mathfrak{p}} U^{\mathfrak{p}-1}$, série qui va être étroitement liée à une certaine fraction rationnelle en U .

On peut illustrer cette idée en considérant le cas d'une équation homogène :

$$(3.1) \quad a_0 x_0^m + a_1 x_1^m + \dots + a_r x_r^m = 0$$

considérée comme l'équation d'une variété dans l'espace projectif P^r de dimension r sur k .

On appelle espace projectif de dimension r sur k , l'ensemble des points x à $r+1$ coordonnées $(x_0, x_1, \dots, x_r)$ définies à une constante multiplicative près et non toutes nulles, c-à-d. que

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_r)$$

$$\text{et } x' = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_r) \quad \lambda \in k^*$$

représentent le même point de P^r .

Le nombre $\overline{N}$ de points de cette variété sur k est relié au nombre N de solutions de la même équation dans l'espace affine, par la

relation :

$$(3.2) \quad N = 1 + (q - 1)\overline{N}$$

En effet si $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_r)$ est une solution dans P^r , $\lambda \xi$ avec $\lambda \in k^*$ est une solution dans l'espace affine. Donc

$N = \overline{N}(q-1) + 1$, le 1 de la formule provenant de la solution identiquement nulle $x = (0, 0, \dots, 0)$ qui n'appartient pas à P^r

Posons $d = (n, q-1)$. Les résultats antérieurs nous donnent :

$$\overline{N} = \frac{q^r - 1}{q - 1} + \frac{q - 1}{q - 1} \sum_{\alpha} \overline{\chi_{\alpha_0}(a_0)} \dots \overline{\chi_{\alpha_r}(a_r)} \cdot j(\alpha)$$

$$\left[d, \alpha_i \equiv 0 \pmod{1}, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=0}^r \alpha_i = 0 \right]$$

$$\overline{N} = \underbrace{1 + q + \dots + q^{r-1}}_A + \underbrace{\sum_{\alpha} \overline{\chi_{\alpha_0}(a_0)} \dots \overline{\chi_{\alpha_r}(a_r)} \cdot j(\alpha)}_B$$

De même on aura $\overline{N_j} = A_j + B_j$

$$\text{et } \sum_1^{\infty} \overline{N_j} U^{j-1} = \sum_1^{\infty} A_j U^{j-1} + \sum_1^{\infty} B_j U^{j-1}$$

Occupons nous tout d'abord de $\sum_1^{\infty} A_j U^{j-1}$

$$\begin{aligned} A &= 1 + q + \dots + q^{r-1} \\ A_2 U &= U + q^2 U + \dots + q^{(r-1)} U \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_j U^{j-1} &= U^{j-1} + q^j U^{j-1} + \dots + q^{j(r-1)} U^{j-1} \end{aligned}$$

et sommions formellement colonne par colonne :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j U^{j-1} = \frac{1}{1-U} + \frac{q}{1-qU} + \dots + \frac{q^{r-1}}{1-q^{r-1}U}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j U^{j-1} = \sum_{h=0}^{r-1} \frac{q^h}{1-q^h U} = - \sum_{h=0}^{r-1} \frac{d}{dU} \log(1-q^h U)$$

Etudions maintenant $\sum_{j=1}^{\infty} B_j U^{j-1}$

Il est clair qu'un $\alpha : (\alpha_0, \dots, \alpha_r)$ n'apportera pas de contribution dans toutes les extensions k_j de k ($1 \leq j < \infty$) car pour apporter contribution il faut que $(q^j - 1)\alpha_i \equiv 0 \pmod{1}$ pour tout i compris entre 0 et r .

Considérons donc un $\alpha : (\alpha_0, \dots, \alpha_r)$ satisfaisant $n.\alpha_i \equiv 0 \pmod{1}$, $\sum \alpha_i \equiv 0 \pmod{1}$, $0 < \alpha_i < 1$. Soit pour cet α , $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\alpha)$ le plus petit entier tel que $(q^j - 1)\alpha_i \equiv 0 \pmod{1}$ avec $0 \leq i \leq r$. Par conséquent les extensions k_j de k telles que $(q^j - 1)\alpha_i \equiv 0 \pmod{1}$ sont celles pour lesquelles j est un multiple de $\mathfrak{m}$, et celles-là seulement.

Choisissons dans $k_{\mathfrak{m}}$ une racine primitive. Nous pourrions comme auparavant définir dans $k_{\mathfrak{m}}$ les caractères χ_{α_i} , les sommes de Gauss $g(\chi_{\alpha_i})$ et la somme de Jacobi $j(\alpha) = \frac{1}{q^{\mathfrak{m}}} g(\chi_{\alpha_0}) \dots g(\chi_{\alpha_r})$

Appelons maintenant pour l'extension $k_{\lambda \mathfrak{m}}$ de k de degré $\lambda \mathfrak{m}$, χ'_{α_i} les caractères multiplicatifs, $g'(\chi'_{\alpha_i})$ les sommes de Gauss, $j'(\alpha)$ la somme de Jacobi. On aura d'après les résultats précédents :

$$\chi'_{\alpha_i}(a_i) = [\chi_{\alpha_i}(a_i)]^{\lambda} ; \quad g'(\chi'_{\alpha_i}) = (-1)^{\lambda-1} \cdot g(\chi_{\alpha_i})^{\lambda}$$

$$j'(\alpha) = (-1)^{(\lambda-1)(r+1)} j(\alpha)^{\lambda} = (-1)^{(\lambda-1)(r-1)} j(\alpha)^{\lambda}$$

On a donc pour un α bien déterminé :

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_{\alpha, j} U^{j-1} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\overline{\chi}_{\alpha_0(a_0)} \dots \overline{\chi}_{\alpha_r(a_r)} \cdot j(\alpha) \right]^{\lambda} \cdot (-1)^{(r-1)(\lambda-1)} \frac{\lambda^{M-1}}{U^M}$$

$$= \frac{\overline{\chi}_{\alpha_0(a_0)} \dots \overline{\chi}_{\alpha_r(a_r)} \cdot j(\alpha) U^{M-1}}{1 - (-1)^{r-1} \overline{\chi}_{\alpha_0(a_0)} \dots \overline{\chi}_{\alpha_r(a_r)} \cdot j(\alpha) U^M}$$

Donc en posant : $C(\alpha) = (-1)^{r-1} \overline{\chi}_{\alpha_0(a_0)} \dots \overline{\chi}_{\alpha_r(a_r)} \cdot j(\alpha)$

$$= \frac{(-1)^r}{j^M(\alpha)} \frac{d}{dU} \log \left[1 - C(\alpha) \cdot U^M(\alpha) \right]$$

On aura donc :

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_j U^{j-1} = (-1)^r \sum_{\alpha} \frac{1}{j^M(\alpha)} \frac{d}{dU} \log \left[1 - C(\alpha) \cdot U^M(\alpha) \right]$$

$$\left[n \alpha_i \equiv 0 (1), \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=0}^r \alpha_i \equiv 0 (1) \right]$$

Finalement :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{j^M} U^{j-1} = - \sum_{h=0}^{r-1} \frac{d}{dU} \left[\log(1 - q^h U) \right] + (-1)^r \sum_{\alpha} \frac{1}{j^M(\alpha)} \frac{d}{dU} \left[\log 1 - C(\alpha) \cdot U^M(\alpha) \right]$$

De plus on remarque que, α étant donné, et en appelant $(q\alpha)$ la partie fractionnaire de $q\alpha$

$$(q\alpha) : \left\{ (q\alpha_0), (q\alpha_1), \dots, (q\alpha_r) \right\}$$

on a : $C\{(q\alpha)\} = C\{\alpha\}$

Tout d'abord $(q\alpha)$ satisfait bien aux trois conditions :

$$(q\alpha_i) \cdot n \equiv 0 (1) \quad \left[0 \leq i \leq r \right], \quad 0 \leq (q\alpha_i) < 1, \quad \sum_{i=0}^r (q\alpha_i) \equiv 0 (1)$$

Ensuite si l'on pose $x = \omega^{\lambda}$

$$\chi_{\alpha}(x) = e^{2\pi i \alpha \lambda} \quad \text{et} \quad \chi_{(q\alpha)}(x) = e^{2\pi i \lambda (q\alpha)} = e^{2\pi i \lambda q\alpha} = \chi_{\alpha}(x^q)$$

Or x appartenant au corps fini k composé de q éléments

on a $x = x^q$. D'où $\chi_{(q\alpha)}(x) = \chi_{\alpha}(x)$

Il résulte de là que $C\{(q\alpha)\} = C(\alpha)$, et de proche en proche on peut démontrer que :

$$C\{(q^p \alpha)\} = C(\alpha)$$

Quel va être alors le plus petit entier ν tel que :

$$\{(q^p \alpha_i)\} \cdot (q^{\nu} - 1) \equiv 0 \quad (1), \text{ c-à-d. :}$$

$$\{q^p \alpha_i - [q^p \alpha_i]\} \cdot (q^{\nu} - 1) \equiv 0 \quad (1)$$

Cette relation entraîne :

$$q^p \alpha_i \cdot (q^{\nu} - 1) \equiv 0 \quad (1)$$

et nous savons que μ est le plus petit entier tel que :

$$\alpha_i (q^{\mu} - 1) \equiv 0 \quad (1)$$

Donc $\alpha = \frac{\lambda}{q^{\mu} - 1}$, λ n'étant pas divisible par $q-1$, ν sera donc le

plus petit entier tel que :

$$\frac{q^p \cdot \lambda \cdot (q^{\nu} - 1)}{q^{\mu} - 1} \equiv 0 \quad (1)$$

1 étant une racine $\mu^{\text{ème}}$ du dénominateur devra l'être également du numérateur ce qui entraîne que la plus petite valeur de ν est exactement μ .

Comme les μ systèmes $(\alpha), (q\alpha), \dots, (q^{\mu-1}\alpha)$ sont tous différents, nous pouvons en conclure que nous avons trouvé μ systèmes possédant le même $\mu(\alpha)$, ce qui va avoir pour conséquence, en groupant ces μ termes dans notre sommation en α , de faire disparaître le facteur $\frac{1}{\mu(\alpha)}$, et on pourra alors écrire :

$$(3.3) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{\nu} - 1}{N_{\nu} U} = \frac{d}{dU} \log \overline{Z}(U)$$

Ce résultat atteint, A. Weil a énoncé la conjecture suivante :

Pour toute variété algébrique, la fonction $\overline{Z}(U)$ est une fraction rationnelle,

$$\overline{Z}(U) = \frac{P_1(U) P_3(U) \dots P_{2n-1}(U)}{P_0(U) P_2(U) \dots P_{2n}(U)}$$

et les degrés des polynômes $P_i(U)$ sont respectivement égaux aux nombres de Betti B_i de la variété.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE DE LA COURBE DE F. KLEIN

INTRODUCTION

Pour tenter de vérifier la conjecture de A. Weil, dans le cas de la courbe de F. Klein :

$$x^3 y + y^3 z + z^3 x = 0$$

nous ne pouvons songer à utiliser la méthode de dénombrement que A. Weil utilise dans le cas des sommes de puissances. Nous utiliserons une méthode élaborée par M. J. Delsarte (Nombre de solutions des équations polynômiales sur un corps fini. Séminaire Bourbaki. Mars 1951 - Conférences anglaises sur les conjectures de Hasse, Artin, Weil), méthode que nous réexposerons dans le cas particulier qui nous intéresse.



CHAPITRE IV

DÉNOMBREMENT SUR UN CORPS FIXE

Soit k un corps fini composé de q éléments et k^* l'ensemble des éléments inversibles de k ; k^* constitue un groupe multiplicatif comprenant $q-1$ éléments.

Nous désignerons par E_3 l'espace vectoriel de dimension 3 sur k et par E_3^* l'ensemble des éléments inversibles de E_3 .

Nous allons considérer l'équation :

$$(4.1) \quad x^3 y + y^3 z + z^3 x = 0$$

et nous allons chercher le nombre de solutions N de cette équation dans le corps k . Puis nous considérerons l'équation (4.1) comme l'équation d'une variété dans l'espace projectif de dimension 2 sur k . Nous chercherons le nombre de points $\overline{N}$ de cette variété. Enfin nous considérerons toutes les extensions de k et nous calculerons le nombre de points $\overline{N}_\vartheta$ de la variété sur une extension k_ϑ de degré ϑ sur k . Nous formerons alors la série formelle : $\sum_{\vartheta=1}^{\infty} \overline{N}_\vartheta U^{\vartheta-1}$ et nous es-

sayons de montrer que cette série est égale à $\frac{1}{2\pi i} \log F(U)$,

où $F(U)$ est une fraction rationnelle de la forme $\frac{P_1(U)}{P_0(U) \cdot P_2(U)}$

les degrés des polynômes P_i étant respectivement égaux aux nombres de Betti de la variété.

Caractères additifs sur E_3^*

Soient Ψ_0 et Ψ_1 deux caractères additifs sur k , différents du caractère principal. Nous aurons pour tout X appartenant à k^* , $\Psi_1(X) = \Psi_0(aX)$, où a décrit k^* lorsque Ψ_1 décrit l'ensemble de tous les caractères additifs sur k , distincts du caractère principal.

Soit $U : (X, Y, Z)$ un élément de E_3^* ; nous poserons :

$$\Psi_0(U) = \Psi_0(X) \cdot \Psi_0(Y) \cdot \Psi_0(Z)$$

Et il est évident que l'on aura pour tout $U \in E_3^*$

$$\Psi_1(U) = \Psi_0(aX) \cdot \Psi_0(aY) \cdot \Psi_0(aZ) = \Psi_0(aU)$$

en posant $aU : (aX, aY, aZ)$

Caractères multiplicatifs sur E_3^*

Un caractère multiplicatif de E_3^* sera défini de la manière suivante :

$$\chi(U) = \chi_\alpha(X) \cdot \chi_\beta(Y) \cdot \chi_\gamma(Z)$$

où $\chi_\alpha, \chi_\beta, \chi_\gamma$, sont trois caractères multiplicatifs sur k et $U : (X, Y, Z) \in E_3^*$. Nous appellerons $\hat{E}_3^*$ l'ensemble de tous les caractères multiplicatifs de cette forme.

Sommes de Gauss

1) Sommes de Gauss sur k .

Soit Ψ_0 un caractère additif sur k différent du caractère principal, soit χ un caractère multiplicatif sur k . Pour tout $a \in k^*$ nous noterons :

$$\sum_{x \in k^*} \chi(x) \cdot \Psi_0(ax) = \overline{\chi(a)} \cdot g_0(\chi),$$

définition valable pour tous les caractères χ . Pour le caractère prin-

cipal on a $g_o(\chi_o) = -1$

Par conséquent si ψ_1 est un caractère additif sur k tel que

$\psi_1(X) = \psi_o(aX)$, alors on aura :

$$\sum_{X \in k^*} \chi(X) \cdot \psi_1(X) = \sum_{X \in k^*} \chi(X) \cdot \psi_o(aX) = \overline{\chi(a)} \cdot g_o(\chi)$$

2) Sommes de Gauss sur E_3^*

Moyennant les définitions précédemment données pour

$\psi_o(U)$ et $\chi(U)$, nous noterons :

$$\sum_{U \in E_3^*} \chi(U) \cdot \psi_o(aU) = \overline{\chi_a(a)} \cdot \overline{\chi_p(a)} \cdot \overline{\chi_y(a)} \cdot g_o(\chi),$$

$g_o(\chi)$ étant une somme de Gauss sur E_3^* . De toute évidence on aura :

$$g_o(\chi) = g_o(\chi_a) \cdot g_o(\chi_p) \cdot g_o(\chi_y)$$

Calcul du nombre N de solutions de l'équation (4.1)

Pour obtenir ce nombre de solutions, il nous faudra calculer

la somme suivante :

$$(4.2) \quad S = \sum \psi(x^3 y + y^3 z + z^3 x)$$

x, y, z décrivant indépendamment k^* .

Posons :

$$(4.3) \quad \begin{cases} X = x^3 y \\ Y = y^3 z \\ Z = z^3 x \end{cases}$$

Les équations (4.3) définissent un homomorphisme de E_3^* dans lui-même :

$$u : (x, y, z) \longrightarrow U : (X, Y, Z)$$

Soit N le noyau de cet homomorphisme. N est un sous-groupe du groupe multiplicatif E_3^* . Soit n l'ordre de ce groupe. Les équations (4.3)

definissent un isomorphisme de E_3^*/N dans un sous-groupe G de E_3^* .

Nous avons donc :

$$S = n \sum_{U \in G} \Psi(U+Z) = n \sum_{U \in G} \Psi(U) \cdot \Psi(Y) \cdot \Psi(Z) = \sum_{U \in G} \Psi(U)$$

Dans E_3^* , ensemble de tous les caractères multiplicatifs sur E_3^* , nous considérerons $\tilde{G}$ orthogonal de G , qui sera l'ensemble des caractères χ qui prennent la valeur 1 sur G . Ces caractères sont constants sur les classes modulo N dans E_3^* et $\tilde{G}$ est isomorphe avec le dual de E_3^*/G . Mais l'ordre de G est $(q-1)^3/n$. L'ordre de $\tilde{G}$ sera donc égal à n .

Si nous considérons la somme :

$$T = \sum_{\chi \in \tilde{G}} \sum_{U \in E_3^*} \chi_\alpha(U) \cdot \chi_\beta(U) \cdot \chi_\gamma(U) \cdot \Psi(U+Y+Z)$$

il est évident que l'on aura

$$T = n \sum_{U \in G} \Psi(U+Y+Z) = \sum_{U \in G} \Psi(U)$$

Nous avons donc $T = S$ et on en déduit :

$$S = \sum_{\chi \in \tilde{G}} \sum_{U \in E_3^*} \chi(U) \cdot \Psi(U)$$

et en écrivant $\Psi(U) = \Psi_0(a)$

$$(4.5) \quad S = \sum_{\chi \in \tilde{G}} \overline{\chi_\alpha(a)} \cdot \overline{\chi_\beta(a)} \cdot \overline{\chi_\gamma(a)} \cdot \chi(a)$$

Calculons maintenant l'expression $\sum_{\chi} S$, Ψ décrivant l'ensemble de tous les caractères additifs sur k sauf le caractère principal. Cela revient à sommer dans (4.5) par rapport à tous les a décrivant k^* . Cette sommation est nulle si $\chi_\alpha \chi_\beta \chi_\gamma$ n'est pas le caractère principal

ou $q-1$ si $\chi_\alpha \chi_\beta \chi_\gamma$ est le caractère principal.

Soit $\tilde{H}$ le sous-ensemble de $\tilde{G}$ défini par la condition que

$\chi_\alpha \chi_\beta \chi_\gamma$ soit le caractère principal. On aura :

$$(4.6) \quad \sum_{\psi} S(\psi) = (q-1) \sum_{\chi \in \tilde{H}} G_0(\chi)$$

Calculons maintenant $\sum_{\psi} S(\psi)$ par un autre procédé.

$$\sum_{\psi} \psi(x^3 y + y^3 z + z^3 x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x^3 y + y^3 z + z^3 x \neq 0 \\ q-1 & \text{si } x^3 y + y^3 z + z^3 x = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \sum_{\psi} S(\psi) = (q-1)N' + (-1) \left[(q-1)^3 - N' \right]$$

en appelant N' le nombre de solutions de l'équation (4.1) sur E_3^* .

Il nous reste finalement :

$$(4.7) \quad \sum_{\psi} S(\psi) = qN' - (q-1)^3$$

En comparant les résultats (4.6) et (4.7), il vient :

$$N' = \frac{(q-1)^3}{q} + \frac{(q-1)}{q} \sum_{\chi \in \tilde{H}} G(\chi)$$

(nous écrirons toujours par la suite $G_0(\chi) = G(\chi)$)

Dans la sommation en χ enlevons le caractère $\chi_{ooo} = \chi_o \chi_o \chi_o$

($\alpha = \beta = \gamma = 0$), et alors $G(\chi_{ooo}) = -1$. Soit $\tilde{H}^*$ l'ensemble des

caractères de $\tilde{H}$ moins χ_{ooo} .

$$\begin{aligned} N' &= \frac{(q-1)^3}{q} - \frac{(q-1)}{q} + \frac{(q-1)}{q} \sum_{\chi \in \tilde{H}^*} G(\chi) \\ &= (q-1) \cdot (q-2) + \frac{(q-1)}{q} \sum_{\chi \in \tilde{H}^*} G(\chi) \end{aligned}$$

Pour avoir le nombre total de solutions ajoutons celles qui n'appartiennent pas à E_3^* . Ce sont :

$$\begin{array}{ll} x = 0, y = 0, z = 0 & : 1 \text{ solution} \\ x = 0, y = 0, z \in k^* & : q-1 \text{ solutions} \\ x = 0, y \in k^*, z = 0 & : q-1 \text{ solutions} \\ x \in k^*, y = 0, z = 0 & : q-1 \text{ solutions} \end{array}$$

Au total $3q - 2$ solutions.

Finalement on obtient :

$$(4.8) \quad N = q^2 + \frac{q-1}{q} \sum_{\chi \in \tilde{H}^*} g(\chi)$$

Enfin plaçons nous en espace projectif. Si nous appelons $\overline{N}$ le nombre de solutions de notre équation dans l'espace projectif de dimension 2 sur k , nous aurons :

$$(4.9) \quad \overline{N} = 1 + (q-1)\overline{N} \\ \text{D'où : } \overline{N} = q + 1 + \frac{1}{q} \sum_{\chi \in \tilde{H}^*} g(\chi)$$

Détermination des caractères χ de $\tilde{H}^*$

Soit ω un générateur de k^* . Posons $x = \omega^\lambda$, $y = \omega^\mu$, $z = \omega^\nu$. $\tilde{\gamma}$ est défini par le fait que :

$\chi_\alpha(x^3 y), \chi_\beta(y^3 z), \chi_\gamma(z^3 x)$ est principal. Ceci entraîne que :

$$\begin{aligned} & e^{2\pi i [\alpha(3\lambda + \mu) + \beta(3\mu + \nu) + \gamma(3\nu + \lambda)]} \\ & = e^{2\pi i [\lambda(3\alpha + \gamma) + \mu(3\beta + \alpha) + \nu(3\gamma + \beta)]} \end{aligned}$$

= 1 quel que soit λ, μ, ν .

Cette condition entraîne :

$$\begin{cases} 3\alpha + \gamma \equiv 0 \quad (1) \\ 3\beta + \alpha \equiv 0 \quad (1) \\ 3\gamma + \beta \equiv 0 \quad (1) \end{cases}$$

De plus $\widetilde{H}$ est déterminé par le fait que $\chi_\alpha \chi_\beta \chi_\gamma$ est principal, ce qui entraîne que :

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \quad (1)$$

En résolvant ces 4 congruences on aboutit à :

$$7\alpha \equiv 0 \quad (1)$$

$$\beta \equiv 9\alpha \quad (1)$$

$$\gamma \equiv -3\alpha \quad (1)$$

En écartant la solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$, qui n'appartient pas à $\widetilde{H}^*$, on en déduit que $\widehat{H}^*$ est composé des 6 caractères qui sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

(4.10)

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
α	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7
β	2/7	4/7	6/7	1/7	3/7	5/7
γ	4/7	1/7	5/7	2/7	6/7	3/7

CHAPITRE V

LA CONJECTURE DE A. WEIL

Soit $k_{\mathfrak{V}}$ une extension de degré $\mathfrak{V}$ sur k . Comme nous l'avons vu au chapitre II, nous pourrions définir relativement au corps $k_{\mathfrak{V}}$, des caractères multiplicatifs χ' et des sommes de Gauss $G'(\chi')$, ces dernières étant reliées aux sommes de Gauss dans le corps k par le théorème de Hasse et Davenport :

$$G'(\chi') = (-1) \left[-G(\chi) \right]^{\mathfrak{V}}$$

En appliquant directement le résultat (4.9) au nombre de solutions $\overline{N}_{\mathfrak{V}}$ de notre équation, relativement à l'extension $k_{\mathfrak{V}}$, nous obtiendrons :

$$\overline{N}_{\mathfrak{V}} = q^{\mathfrak{V}} + 1 + \frac{1}{q^{\mathfrak{V}}} \sum_{\chi' \in \tilde{H}^*} G'(\chi')$$

$$\text{En posant } A_{\mathfrak{V}} = q^{\mathfrak{V}} + 1 \quad \text{et} \quad B_{\mathfrak{V}} = \frac{1}{q^{\mathfrak{V}}} \sum_{\chi' \in \tilde{H}^*} G'(\chi')$$

notre série formelle s'écrit :

$$\sum_{\mathfrak{V}=1}^{\infty} \overline{N}_{\mathfrak{V}} U^{\mathfrak{V}-1} = \sum_{\mathfrak{V}=1}^{\infty} A_{\mathfrak{V}} U^{\mathfrak{V}-1} + \sum_{\mathfrak{V}=1}^{\infty} B_{\mathfrak{V}} U^{\mathfrak{V}-1}$$

Le calcul du premier terme s'effectue immédiatement :

$$\sum_{\mathfrak{V}=1}^{\infty} A_{\mathfrak{V}} U^{\mathfrak{V}-1} = \sum_{\mathfrak{V}=1}^{\infty} q^{\mathfrak{V}} U^{\mathfrak{V}-1} + \sum_{\mathfrak{V}=1}^{\infty} U^{\mathfrak{V}-1}$$

$$(5.1) \quad = \frac{q}{1-qU} + \frac{1}{1-U} = \frac{d}{dU} \log \left[(1-U)(1-qU) \right]^{-1}$$

Le calcul de $\sum_{j=1}^{\infty} B_j U^{j-1}$ est légèrement plus délicat

et nous amènera à considérer les restes de q modulo 7.

En effet soit χ_α un caractère multiplicatif sur k_j .

α devra bien entendu vérifier :

$$(5.2) \quad (q^j - 1) \cdot \alpha \equiv 0 \quad (1)$$

D'autre part, d'après les conditions (4.10) qui ne dépendent en aucune façon du corps envisagé, on doit nécessairement avoir :

$$(5.3) \quad 7 \alpha \equiv 0 \quad (1)$$

En comparant (5.2) et (5.3), on en déduit que 7 doit diviser $q^j - 1$ pour que l'on puisse trouver des caractères appartenant à $\tilde{H}^*$. q étant fixé, nous appellerons j le plus petit entier tel que $q^j - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

Toutes les extensions qui donnent des caractères intervenant dans la sommation B_j seront alors de degré λj , λ étant un entier quelconque.

Si $q \equiv 0 \pmod{7}$ aucun j ne répond à la question

$$q \equiv 1 \pmod{7} \quad j = 1$$

$$q \equiv 6 \pmod{7} \quad j = 2$$

$$q \equiv 2 \text{ ou } 4 \pmod{7} \quad j = 3$$

$$q \equiv 3 \text{ ou } 5 \pmod{7} \quad j = 6$$

Tout d'abord si $q \equiv 0 \pmod{7}$, $\sum B_j U^{j-1}$ se réduit au résultat (5.1).

D'autre part q étant donné $\not\equiv 0 \pmod{7}$, j sera parfaitement déterminé. Nous envisagerons alors toutes les extensions $k_{\lambda j}$ de degré λ sur k_j , les sommes de Gauss $S(\chi)$ étant maintenant rela-

tives à k_M . En utilisant le théorème de Hasse et Davenport, on aura :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\chi \in \tilde{H}^*} B_{\chi} U^{\chi-1} &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{U^{\lambda M-1}}{q^{\lambda M}} \sum_{\chi \in \tilde{H}^*} [-G(\chi)]^{\lambda} \\
 &= \sum_{\chi \in \tilde{H}^*} \frac{U^{M-1} G(\chi)}{q^M + U^M G(\chi)} \\
 (5.4) \quad &= \frac{d}{dU} \log \prod_{\chi \in \tilde{H}^*} [q^M + U^M G(\chi)]^{1/M}
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant les 6 caractères χ du tableau (4.10) et les sommes de Gauss relatives à ces caractères. Il est évident que :

$$\begin{aligned}
 G(\chi_1) &= G(\chi_2) = G(\chi_4) \\
 \text{et } G(\chi_3) &= G(\chi_5) = G(\chi_6).
 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 G(\chi_6) &= \sum_{x,y,z} \chi_{6/7}(x) \cdot \chi_{5/7}(y) \cdot \chi_{3/7}(z) \psi_{(x+y+z)} \\
 &= \sum_{x,y,z} \chi_{-1/7}(x) \cdot \chi_{-2/7}(y) \cdot \chi_{-4/7}(z) \psi_{(x+y+z)} = G(\overline{\chi_1})
 \end{aligned}$$

Or, on ne change pas la valeur de $G(\chi_1)$ en effectuant le changement de variables $(x,y,z) \longrightarrow (-x,-y,-z)$

$$\begin{aligned}
 G(\chi_1) &= \sum_{x,y,z} \chi_{1/7}(-x) \chi_{2/7}(-y) \chi_{4/7}(-z) \psi_{-(x+y+z)} \\
 &= \sum_{x,y,z} \chi_{1/7}(x) \chi_{2/7}(y) \chi_{4/7}(z) \psi_{-(x+y+z)} = \overline{G(\chi_1)}
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne $G(\overline{\chi_1}) = \overline{G(\chi_1)} = G(\chi_6)$

Par conséquent si l'on pose :

$$\begin{aligned}
 G(\chi) &= G(\chi_1) = G(\chi_2) = G(\chi_4) \\
 \text{on aura : } G(\chi) &= G(\chi_3) = G(\chi_5) = G(\chi_6)
 \end{aligned}$$

le produit des s termes de la somme (1.1) sera de :

$$\prod_{\chi \in \mathcal{H}_s} \left[x^{M_\chi} + x^{N_\chi} a(\chi) \right] = \left[x^{M_0} + x^{N_0} a(1) \right] \left[x^{M_1} + x^{N_1} a(\chi) \right] \dots$$

et en prenant l'inductrice χ réelle,

$$x^{M_0} + x^{N_0} a(1) = x^{M_0} + x^{N_0} = 1$$

$$\prod_{\chi \in \mathcal{H}_s} \left[x^{M_\chi} + x^{N_\chi} a(\chi) \right] = \left| \left[x^{M_0} + x^{N_0} a(1) \right]^{s_0} \right|$$

Or M étant un diviseur de s , s_0 est un nombre entier et nous obtenons ainsi le module d'un polynôme en x de s_0 degré.

En tenant compte des relations (1.2) nous avons :

$$\sum_{j=1}^s \overline{a_j} x^{M_j} = \frac{1}{x^{M_0}} \sum_{j=1}^s a_j x^{N_j}$$

avec :

$$a_j(x) = \frac{[x^{M_j} + x^{N_j} a(\chi)]^{s_j}}{(1-x)^{s_j} (1-x^2)^{s_j}}$$

Le produit des s termes de la somme (1.1) sera de plus produit par le facteur complètement la conjuguée de a_j . Or, entre deux de ces conjugués :

- Soit $M = 1$ ou 2 , alors a_j est conjugué de $1, 2, 3$ ou 4 modulo 7 ,

le module de a_j est donc le module de a_j modulo 7 , ou

$7(7)$ est donc une fonction arithmétique de la période 7 .

- Soit $M = 2$ ou 3 , le module est le module d'un polynôme de 2 ou 3 degré. Dans ce cas pour trouver la conjuguée de a_j , il faut

trouver des entiers qui se conjuguent de 1 ou 2 modulo 7 avec M ou

avec 2 modulo 7 , puis de quel module se conjuguent les

de a_j .

Il est pourtant à remarquer que l'hypothèse émise par Weil au sujet des nombres de Betti se trouve vérifiée, puisque les trois nombres de Betti de la variété que nous étudions sont respectivement 1, 6, 1, nombres que M. Gauthier a eu l'obligeance de me fournir. Or $F(U)$ est une fraction dont le numérateur est du 6^{ème} degré et le dénominateur un produit de deux polynômes du premier degré, ce qui est bien en accord avec la conjecture d'A. Weil.

ANNEXE A LA THESE DE M. GRANDIDIER

Voici comment, en application de la méthode que j'ai exposée dans une note aux Comptes Rendus (t. 240, p. 1851-53, mai 1955), se présente le calcul des nombres de Betti de la courbe de KLEIN.

1°/ - La courbe est sans singularité.

2°/ - D'après le théorème de LEFSCHETZ :

$$B_0 = 1 \qquad B_2 = 1$$

3°/ - Si χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré, on aura B_1 au moyen de :

$$B_1 = 2 - \chi$$

La méthode que j'ai exposée du calcul de χ donne :

$$\chi = \frac{4}{1!} \frac{d}{dx} \left[\frac{(1+x)^3}{(1+4x)} \right]_{x=0}$$

et comme

$$(1+x)^3(1+4x)^{-1} = (1+3x+3x^2+....)(1-4x+16x^2+....) = 1-x+7x^2+....$$

on obtient

$$\chi = -4$$

et

$$B_1 = 6$$

4°/ - Ce résultat est en accord avec le fait que la courbe est de genre 3 :

$$B_1 = 2g$$

Il en résulte que la fonction $Z(u)$ relative à la courbe de Klein doit se présenter sous la forme

$$Z(u) = \frac{P_6}{P_1 \cdot Q_1}$$

L. GAUTHIER

Vu et approuvé
NANCY, le 26 mai 1957

Le Doyen,

E. URION

VU et PRESIS D'IMPRIMER

NANCY, le 31 mai 1957

Pour le Recteur,
Le Vice-Président
du
Conseil de l'Université

GRAPPIN

